

KESTABILAN MODEL MANGSA PEMANGSA DENGAN FUNGSI RESPON HOLLING TIPE III DAN PENYAKIT PADA PEMANGSA SUPER

A. Muh. Amil Siddik¹⁾, Syamsuddin Toaha²⁾, Kasbawati³⁾

¹⁾²⁾³⁾Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam,

Universitas Hasanuddin

Jln. Perintis Kemerdekaan, KM 10, Makassar

¹⁾baka.amil@gmail.com

²⁾syamsuddint@yahoo.com

³⁾kasbawati@gmail.com

Abstract. Dalam penelitian ini, dibahas kestabilan model mangsa pemangsa tiga populasi dengan penyakit yang menyebar pada pemangsa super di mana fungsi predasi mengikuti fungsi respon Holling tipe III. Untuk mengetahui kestabilan lokal titik ekuilibrium dari model yang dibangun, dilakukan dengan cara melinearkan sistem di sekitar titik ekuilibrium. Secara analitik diperoleh lima titik ekuilibrium yang mungkin wujud pada sistem. Hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan variasi beberapa nilai parameter penyebaran penyakit, hanya titik ekuilibrium dengan semua populasi eksis yang dapat stabil dan juga dengan pengurangan tingkat penyebaran penyakit tidak mengubah kestabilan dari sistem, namun mempercepat osilasi dari kurva solusi. Begitu pula dengan menaikkan tingkat penyebaran penyakit memperlambat osilasi dari kurva solusi. Disimpulkan bahwa keberadaan penyakit tidak mempengaruhi kestabilan melainkan mempercepat atau memperlambat osilasi kurva solusi.

Keywords— Model mangsa pemangsa, Pemangsa super, Penyakit, Fungsi respon Holling, Kestabilan titik ekuilibrium

I. PENDAHULUAN

Dalam studi ekologi, kelangsungan hidup spesies dari populasi sangat penting untuk dikaji. Kelangsungan hidup dari populasi dipengaruhi oleh banyak faktor, dua diantaranya adalah faktor ekologi dan epidemiologi. Salah satu faktor ekologi yang dimaksud adalah interaksi spesies dalam bentuk kompetisi dan predasi. Sedangkan faktor epidemiologi adalah penyebaran penyakit menular (Saenz, 2006).

Interaksi antar spesies yang terjadi dalam suatu ekosistem menyebabkan keadaan spesies dari suatu populasi dapat berubah. Interaksi tersebut dapat memberikan dampak positif, negatif atau bahkan tidak berpengaruh terhadap spesies-spesies yang berinteraksi. Interaksi antar spesies secara umum banyak berbentuk model mangsa pemangsa yang merujuk kepada model Lotka-Volterra.

Selain faktor ekologi, faktor epidemiologi yakni penyebaran penyakit menular juga berpengaruh dalam kelangsungan dari suatu

populasi. Dalam pemodelan matematika dikaji berbagai macam model epidemik, salah satu diantaranya adalah model epidemik klasik. Model epidemik klasik membagi populasi menjadi dua kelas, yaitu kelas rentan (*susceptible*) dan terinfeksi (*infected*). Sub-populasi rentan, rentan terhadap infeksi dan sub-populasi yang terinfeksi dapat memindahkan infeksi ke sub-populasi rentan.

Banyak peneliti yang tertarik untuk meneliti tentang bagaimana efek penyakit dalam sistem mangsa pemangsa. Kooi, dkk. (2011) telah meneliti model mangsa pemangsa dua spesies, dengan penyakit hanya terjadi pada populasi pemangsa. Pada model tersebut mekanisme cara pemangsa berburu berdasarkan fungsi respon Holling Tipe II. Berdasarkan hasil analisis model tersebut diperoleh sistem yang lebih stabil dengan adanya kenaikan laju infeksi penyakit. Model mangsa pemangsa dengan infeksi parasit yang menyebar hanya pada populasi pemangsa dalam bentuk SIS (*Susceptible Infected Susceptible*) juga telah dikaji oleh Haque (2010). Hasil analisis menunjukkan bahwa infeksi pada pemangsa dapat menyelamatkan populasi mangsa dari kepunahan.

Penelitian ini berdasarkan pada penelitian yang telah dilakukan oleh Mbava, dkk (2017) dan Maas, dkk (2016). Keduanya meneliti pengaruh penyakit Bovine Tuberculosis (BTB) yang menyerang spesies singa di Afrika, tepatnya di Kruger National Park. Meskipun penyakit ini berdampak negatif bagi kelangsungan hidup dari singa, namun diharapkan dengan adanya penyakit ini dapat menyelamatkan citah dari kepunahan. Karena seperti yang diketahui, menurut IUCN (International Union for Conservation of Nature) Red Data Books, citah dimasukkan ke kategori hampir punah. Dan salah satu yang menyebabkan berkurangnya populasi citah adalah adanya kompetisi dengan singa. Pada penelitian ini, dianalisis tentang kestabilan titik ekuilibrium dari model mangsa pemangsa dengan penyakit pada pemangsa super yang mempunyai karakteristik berburu berdasarkan fungsi respon Holling III. Dipilihnya fungsi respon Holling tipe III karena

memiliki permasalahan yang sesuai dengan jenis pemangsa yang cenderung akan mencari mangsa yang lain ketika populasi mangsa yang menjadi mangsanya mulai berkurang.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam penelitian sebelumnya, Haque dkk, (2010) menjabarkan model mangsa pemangsa yang terdiri atas satu mangsa dan satu pemangsa dengan penyakit menyebar pada spesies pemangsa. Dalam model tersebut fungsi respon yang digunakan adalah Holling tipe I. Dari penelitian tersebut disimpulkan bahwa penyakit pada pemangsa dapat dijadikan sebagai pengontrol biologis terhadap sistem mangsa pemangsa.

Kemudian Mbava dkk, (2017) menjabarkan model mangsa pemangsa yang terdiri atas satu mangsa dan dua pemangsa di mana pemangsa terdiri atas pemangsa dan pemangsa super. Pada model ini penyakit menyebar pada pemangsa super. Dalam model tersebut fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe II. Digunakannya fungsi respon Holling tipe II karena menurut Skalski dan Gilliam, (2001), fungsi Holling tipe II merupakan fungsi respon yang paling banyak digunakan untuk spesies pemangsa.

Namun, berdasarkan Huang dkk, (2006), untuk pemangsa vertebrata lebih cocok menggunakan fungsi respon Holling tipe III dan juga dengan asumsi bahwa karakteristik pemangsa akan mencari mangsa lain jika mangsanya mulai berkurang maka fungsi respon yang digunakan adalah fungsi respon Holling tipe III.

III. METODE PENELITIAN

A. Tahap Studi Literatur

Pada tahap ini dilakukan identifikasi permasalahan dengan mencari referensi yang menunjang penelitian. Pemahaman mengenai masalah kestabilan sangat membantu dalam penyelesaian model tersebut.

B. Tahap Analisis Model

Pada tahap ini model dianalisis dengan cara mencari titik ekuilibrium kemudian diperiksa kestabilannya. Karena persamaan model merupakan sistem persamaan diferensial tak linear maka model perlu dilinearisasikan terlebih dahulu dengan membentuk matriks Jacobian, selanjutnya diteliti kestabilannya dengan melihat nilai eigen atau menggunakan metode Routh-Hurwitz.

C. Tahap Simulasi Model

Pada tahap ini simulasi dilakukan untuk melihat perilaku dari kurva solusi.

D. Tahap Analisis Hasil Simulasi

Pada tahap ini dilakukan analisis terhadap hasil yang telah diperoleh dari simulasi.

E. Tahap Kesimpulan

Pada tahap ini kesimpulan ditarik dari model yang telah dianalisis kestabilan serta hasil dari simulasi.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Model Mangsa Pemangsa

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam konstruksi model mangsa-pemangsa dengan penyakit pada pemangsa super diberikan sebagai berikut.

1. Laju pertumbuhan mangsa menggunakan dinamika pertumbuhan logistik.
2. Penyakit hanya menyerang dan menular pada populasi pemangsa super.
3. Karakteristik berburu pemangsa dan pemangsa super diasumsikan mencari mangsa lain jika mangsanya mulai berkurang, sehingga fungsi respon yang digunakan adalah Holling tipe III.
4. Pemangsa super yang sakit dianggap kurang kuat berkompetisi dengan pemangsa.
5. Populasi pemangsa super rentan penyakit dan pemangsa mengalami kematian alami. Sedangkan populasi pemangsa super terinfeksi penyakit selain kematian alami, juga mengalami kematian akibat terinfeksi penyakit.

Model mangsa pemangsa dengan penyakit pada pemangsa super diberikan pada Eq.1 berikut

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= rM \left(1 - \frac{M}{K}\right) - \frac{aM^2P}{1+M^2e} - \frac{bM^2S}{1+M^2f} - \frac{bcM^2I}{1+M^2f}, \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{lM^2P}{1+M^2e} - pPS - \mu P, \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{mM^2S}{1+M^2f} - \beta SI - vS, \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{nM^2I}{1+M^2f} + \beta SI - (v + \delta)I.\end{aligned}\quad (1)$$

Berdasarkan Eq.1 M, P, S, I masing-masing adalah populasi mangsa, pemangsa, pemangsa super rentan penyakit dan pemangsa super terinfeksi penyakit.

Definisi parameter Eq.1 diberikan pada Tabel 1.

TABEL 1. DEFINISI PARAMETER PERSAMAAN (1)

Parameter	Definisi
r	Laju pertumbuhan intrinsik mangsa
K	Carrying capacity mangsa
a	Laju penangkapan mangsa oleh pemangsa
b	Laju penangkapan mangsa oleh pemangsa super
c	Efisiensi singa terinfeksi untuk menangkap impala
e	Penanganan impala oleh citah
f	Penanganan impala oleh singa
l	Konversi onversi impala menjadi citah baru
m	Konversi impala menjadi singa rentan baru
n	Konversi impala menjadi singa terinfeksi baru
p	Laju kematian citah akibat singa
β	Penyebaran penyakit
v	Laju kematian alami singa
δ	Laju kematian singa terinfeksi akibat penyakit
μ	Laju kematian alami citah

Perbedaan yang mendasar antara penelitian ini dengan penelitian sebelumnya adalah asumsi pada fungsi predasi. Pada penelitian ini diasumsikan menggunakan fungsi respon Holling tipe III sedangkan pada penelitian sebelumnya menggunakan fungsi respon Holling tipe II. Asumsi menggunakan fungsi respon Holling III sesuai dengan karakteristik pada pemangsa super yang mencari mangsa lain jika mangsanya mulai berkurang.

B. Analisis Titik Ekuilibrium

Terdapat lima titik ekuilibrium yang mungkin dari Eq.1 yaitu

1. Titik Ekuilibrium $E_1(M_1, 0, S_1, I_1)$

M_1 merupakan akar dari persamaan

$$M_1^5 \beta f^2 r - M_1^4 f^2 r \beta K + (-K b c f v + K b c m - K b \delta f + K b f v - K b n + 2 \beta f r) M_1^3 - M_1^2 2 f r \beta K + (-K b c v + K b \delta + K b v + \beta r) M_1 - r \beta K = 0,$$

$$S_1 = \frac{n M_1^2 - v - \delta - M_1^2 v f - M_1^2 f \delta}{-\beta(1 + M_1^2 f)},$$

$$I_1 = \frac{m M_1^2 - v(1 + M_1^2 f)}{(1 + M_1^2 f) \beta}.$$

$E_1(M_1, 0, S_1, I_1)$ akan wujud jika $v + \delta > \frac{n M_1^2}{1 + M_1^2 f}$, kematian pemangsa super terinfeksi penyakit lebih besar dari pada fungsi pertumbuhannya, dan $v < \frac{m M_1^2}{1 + M_1^2 f}$, yaitu kematian pemangsa super rentan penyakit kurang dari fungsi pertumbuhannya.

2. Titik Ekuilibrium $E_2(M_2, 0, S_2, 0)$

$$M_2 = \sqrt{\frac{v}{m - f v}},$$

$$S_2 = \left(1 + \left(\frac{v}{m - f v}\right) f\right) \frac{r K - r \sqrt{\frac{v}{m - f v}}}{b K \sqrt{\frac{v}{m - f v}}}.$$

$E_2(M_2, 0, S_2, 0)$ akan wujud jika $m > f v$, fungsi pertumbuhan pemangsa super lebih dari kematiannya, dan $K > M_2$, yaitu populasi mangsa kurang dari carrying capacity nya.

3. Titik Ekuilibrium $E_3(M_3, P_3, S_3, 0)$

$M_3 = \sqrt{\frac{v}{m - f v}}, P_3 = \frac{(1 + M_3^2 e) \left(\frac{r K - r M_3}{K} - \frac{b M_3 S_3}{1 + M_3^2 f} \right)}{a M_3}, S_3 = \frac{v l + \mu f v - m \mu - \mu v e}{p(m - f v + v e)}$. $E_3(M_3, P_3, S_3, 0)$ akan wujud jika $m > f v$, fungsi pertumbuhan pemangsa super lebih dari kematiannya, $\frac{v}{m - f v} > \frac{\mu}{l - e \mu}$, rasio pertumbuhan pemangsa super lebih dari pemangsa, dan $r \left(1 - \frac{M_3}{K}\right) > \frac{b M_3 S_3}{1 + M_3^2 f}$, fungsi pertumbuhan mangsa lebih dari laju pemangsaan oleh pemangsa super renta penyakit.

4. Titik Ekuilibrium $E_4(M_4, P_4, 0, 0)$

$$M_4 = \sqrt{\frac{\mu}{l - e \mu}}, P_4 = \frac{r \left(1 - \frac{M_4}{K}\right) (1 + M_4^2 e)}{a M_4}.$$

$E_4(M_4, P_4, 0, 0)$ akan wujud jika $l > e \mu$, fungsi pertumbuhan pemangsa lebih besar dari pada kematiannya, $M_4 < K$, populasi mangsa kurang dari carrying capacity nya.

5. Titik Ekuilibrium $E_5(M_5, P_5, S_5, I_5)$

$$M_5 = \left(\frac{-(-epv - ep\delta + np - vfp - f\delta p - f\beta\mu + \beta l - \mu\beta e) + \sqrt{(-epv - ep\delta + np - vfp - f\delta p - f\beta\mu + \beta l - \mu\beta e)^2 - 4epn - epvf - f\delta e p + fl\beta - f\beta\mu e - vp - \delta p - \beta\mu 4epn - epvf - f\delta e p + fl\beta - f\beta\mu e}}{2(epn - epvf - f\delta e p + fl\beta - f\beta\mu e)} \right) + \frac{-epv - ep\delta + np - vfp - f\delta p - f\beta\mu + \beta l - \mu\beta e}{2(epn - epvf - f\delta e p + fl\beta - f\beta\mu e)},$$

$$I_5 = \frac{M_5^2 m - v - M_5^2 v f}{\beta(1 + M_5^2 f)}, S_5 = \frac{M_5^2 l - M_5^2 \mu e - \mu}{M_5^2 e p + p}, P_5 = \frac{(rK - M_5 r)(M_5^2 f + 1) - b M_5 S_5 K - c b M_5 S_5 K}{a M_5 K (M_5^2 f + 1)} (M_5^2 e + 1).$$

$E_5(M_5, P_5, S_5, I_5)$ akan wujud jika $M_5^2 > \frac{v}{m - v f}$, kuadrat populasi mangsa lebih dari rasio pertumbuhan pemangsa super rentan penyakit $M_5^2 > \frac{\mu}{l - \mu e}$, kuadrat populasi mangsa lebih dari rasio pertumbuhan pemangsa, dan $r \left(1 - \frac{M_5}{K}\right) > \frac{b M_5 S_5}{M_5^2 f + 1} + \frac{c b M_5 I_5}{M_5^2 f + 1}$, fungsi pertumbuhan mangsa laju pemangsaan oleh pemangsa super.

C. Analisis Kestabilan

1. Kestabilan Lokal $E_1(M_1, 0, S_1, I_1)$

Matriks Jacobi pada E_1 adalah

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} J_{11}^{[1]} & J_{12}^{[1]} & J_{13}^{[1]} & J_{14}^{[1]} \\ 0 & J_{22}^{[1]} & 0 & 0 \\ J_{31}^{[1]} & 0 & J_{33}^{[1]} & J_{34}^{[1]} \\ J_{41}^{[1]} & 0 & J_{43}^{[1]} & J_{44}^{[1]} \end{bmatrix},$$

dengan

$$J_{11}^{[1]} = r \left(1 - \frac{2M_1}{K}\right) - \frac{2bM_1S_1}{(M_1^2f + 1)^2} - \frac{2cbM_1I_1}{(M_1^2f + 1)^2},$$

$$J_{12}^{[1]} = -\frac{M_1^2 a}{M_1^2 e + 1},$$

$$J_{13}^{[1]} = -\frac{M_1^2 b}{M_1^2 f + 1},$$

$$J_{14}^{[1]} = -cb \frac{M_1^2}{M_1^2 f + 1},$$

$$J_{22}^{[1]} = \frac{M_1^2 l}{M_1^2 e + 1} - pS_1 - \mu,$$

$$J_{31}^{[1]} = \frac{2mM_1S_1}{(M_1^2f + 1)^2},$$

$$J_{33}^{[1]} = \frac{mM_1^2}{1 + M_1^2 f} - \beta I_1 - v,$$

$$J_{34}^{[1]} = -\beta S_1,$$

$$J_{41}^{[1]} = \frac{2nM_1I_1}{(M_1^2f + 1)^2},$$

$$J_{43}^{[1]} = \beta I_1,$$

$$J_{44}^{[1]} = \frac{nM_1^2}{1 + M_1^2 f} + \beta S_1 - v - \delta.$$

Berdasarkan baris kedua matriks $(J(E_1))$, diperoleh nilai eigen $\frac{M_1^2 l}{M_1^2 e + 1} - pS_1 - \mu$, nilai eigen yang lain diperoleh dari matriks 3×3 berikut

$$J_1^* = \begin{bmatrix} J_{11}^{[1]} & J_{13}^{[1]} & J_{14}^{[1]} \\ J_{31}^{[1]} & J_{33}^{[1]} & J_{34}^{[1]} \\ J_{41}^{[1]} & J_{43}^{[1]} & J_{44}^{[1]} \end{bmatrix}.$$

Misalkan

$$J_1^* = \begin{bmatrix} m_{11}^{[1]} & m_{12}^{[1]} & m_{13}^{[1]} \\ m_{21}^{[1]} & m_{22}^{[1]} & m_{23}^{[1]} \\ m_{31}^{[1]} & m_{32}^{[1]} & m_{33}^{[1]} \end{bmatrix},$$

maka polinomial karakteristik J_1^* adalah

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (2)$$

dengan

$$\begin{aligned} a_1 &= -(m_{11}^{[1]} + m_{22}^{[1]} + m_{33}^{[1]}), \\ a_2 &= m_{11}^{[1]}m_{22}^{[1]} + m_{11}^{[1]}m_{33}^{[1]} \\ &\quad + m_{22}^{[1]}m_{33}^{[1]} - m_{12}^{[1]}m_{21}^{[1]} \\ &\quad - m_{13}^{[1]}m_{31}^{[1]} - m_{23}^{[1]}m_{32}^{[1]}, \\ a_3 &= m_{11}^{[1]}m_{23}^{[1]}m_{32}^{[1]} + m_{12}^{[1]}m_{21}^{[1]}m_{33}^{[1]} \\ &\quad + m_{13}^{[1]}m_{22}^{[1]}m_{31}^{[1]} - m_{11}^{[1]}m_{22}^{[1]}m_{33}^{[1]} \\ &\quad - m_{12}^{[1]}m_{23}^{[1]}m_{31}^{[1]} \\ &\quad - m_{13}^{[1]}m_{21}^{[1]}m_{32}^{[1]}. \end{aligned}$$

Jika $m_{11}^{[1]} < 0, m_{22}^{[1]} < 0, m_{33}^{[1]} < 0$, maka $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ jika $m_{11}^{[1]}m_{23}^{[1]}m_{32}^{[1]} + m_{12}^{[1]}m_{21}^{[1]}m_{33}^{[1]} + m_{13}^{[1]}m_{22}^{[1]}m_{31}^{[1]} - m_{11}^{[1]}m_{22}^{[1]}m_{33}^{[1]} - m_{12}^{[1]}m_{23}^{[1]}m_{31}^{[1]} - m_{13}^{[1]}m_{21}^{[1]}m_{32}^{[1]} > m_{12}^{[1]}m_{23}^{[1]}m_{31}^{[1]}$.

Berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, Polinomial Eq.2 memiliki nilai eigen dengan bagian real bernilai negatif jika $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ dan

$$\begin{aligned} (R1) \Delta_1 &= |a_1| > 0, \\ (R2) \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0. \end{aligned}$$

Jadi, $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$. Hasil di atas dinyatakan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 1. Titik ekuilibrium E_1 stabil lokal jika

- (a) $\frac{M_1^2 l}{M_1^2 e + 1} < pS_1 + \mu$,
- (b) $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ dan $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

2. Kestabilan Lokal $E_2(M_2, 0, S_2, 0)$

Matriks Jacobi untuk E_2 adalah

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} J_{11}^{[2]} & J_{12}^{[2]} & J_{13}^{[2]} & J_{14}^{[2]} \\ 0 & J_{22}^{[2]} & 0 & 0 \\ J_{31}^{[2]} & 0 & J_{33}^{[2]} & J_{34}^{[2]} \\ 0 & 0 & 0 & J_{44}^{[2]} \end{bmatrix},$$

dengan

$$J_{11}^{[2]} = r \left(1 - \frac{2M_2}{K} \right) - \frac{2bM_2 S_2}{(M_2^2 f + 1)^2},$$

$$J_{12}^{[2]} = -\frac{M_2^2 a}{M_2^2 e + 1},$$

$$J_{13}^{[2]} = -\frac{M_2^2 b}{M_2^2 f + 1},$$

$$J_{14}^{[2]} = -cb \frac{M_2^2}{M_2^2 f + 1},$$

$$J_{22}^{[2]} = \frac{M_2^2 l}{1 + M_2^2 e} - pS_2 - \mu,$$

$$J_{31}^{[2]} = \frac{2mM_2 S_2}{(M_2^2 f + 1)^2},$$

$$J_{33}^{[2]} = \frac{M_2^2 m}{M_2^2 f + 1} - v,$$

$$J_{34}^{[2]} = -\beta S_2,$$

$$J_{44}^{[2]} = \frac{M_2^2 n}{M_2^2 f + 1} + \beta S_2 - (v + \delta).$$

Berdasarkan baris kedua dan keempat matriks $(J(E_2))$, diperoleh dua nilai eigen $\frac{M_2^2 l}{1 + M_2^2 e} - pS_2 - \mu$ dan $\frac{M_2^2 n}{M_2^2 f + 1} + \beta S_2 - (v + \delta)$, nilai eigen yang

lain diperoleh dari matriks 2×2 berikut

$$J_2^* = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2M_2}{K} \right) - \frac{2bM_2 S_2}{(M_2^2 f + 1)^2} & -\frac{M_2^2 b}{M_2^2 f + 1} \\ \frac{2mM_2 S_2}{(M_2^2 f + 1)^2} & \frac{M_2^2 m}{M_2^2 f + 1} - v \end{bmatrix}.$$

Maka polinomial karakteristik J_2^* adalah $\lambda^2 + b_1 \lambda + b_2 = 0$,

dengan

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{K(M_2^2 f + 1)^2} (KM_2^4 f^2 r - KM_2^4 f^2 v \\ &\quad - 2M_2^5 f^2 r + KM_2^4 f m + 2KM_2^2 f r \\ &\quad - 2KM_2^2 f v - 4M_2^3 f r + KM_2^2 m \\ &\quad - 2KM_2 W_2 b + Kr - Kv - 2M_2 r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{1}{K(M_2^2 f + 1)^2} (KM_2^4 f^2 r v - 2M_2^5 f^2 r v \\ &\quad - KM_2^4 f m r + 2M_2^5 f m r + 2KM_2^2 f r v \\ &\quad - 4M_2^3 f r v - KM_2^2 m r - 2KM_2 S_2 b v \\ &\quad + 2M_2^3 m r + Kr v - 2M_2 r v). \end{aligned}$$

Hasil di atas dinyatakan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 2. Titik ekuilibrium E_2 stabil lokal jika

- (a) $\frac{M_2^2 l}{1 + M_2^2 e} < pS_2 + \mu$,
- (b) $\frac{M_2^2 n}{M_2^2 f + 1} + \beta S_2 < v + \delta$,
- (c) $KM_2^4 f^2 r - KM_2^4 f^2 v - 2M_2^5 f^2 r + KM_2^4 f m + 2KM_2^2 f r - 2KM_2^2 f v - 4M_2^3 f r + KM_2^2 m - 2KM_2 W_2 b + Kr - Kv - 2M_2 r < 0$,
- (d) $KM_2^4 f^2 r v - 2M_2^5 f^2 r v - KM_2^4 f m r + 2M_2^5 f m r + 2KM_2^2 f r v - 4M_2^3 f r v - KM_2^2 m r - 2KM_2 S_2 b v + 2M_2^3 m r + Kr v - 2M_2 r v < 0$.

3. Kestabilan Lokal $E_3(M_3, P_3, S_3, 0)$

Matriks Jacobi E_3 adalah

$$J(E_3) = \begin{bmatrix} J_{11}^{[3]} & J_{12}^{[3]} & J_{13}^{[3]} & J_{14}^{[3]} \\ J_{21}^{[3]} & J_{22}^{[3]} & J_{23}^{[3]} & 0 \\ J_{31}^{[3]} & 0 & J_{33}^{[3]} & J_{34}^{[3]} \\ 0 & 0 & 0 & J_{44}^{[3]} \end{bmatrix},$$

dengan

$$J_{11}^{[3]} = r \left(1 - \frac{2M_3}{K} \right) - \frac{2aM_3 P_3}{(M_3^2 e + 1)^2} - \frac{2bM_3 S_3}{(M_3^2 f + 1)^2},$$

$$J_{12}^{[3]} = -\frac{M_3^2 a}{M_3^2 e + 1},$$

$$J_{13}^{[3]} = -\frac{M_3^2 b}{M_3^2 f + 1},$$

$$\begin{aligned} J_{14}^{[3]} &= -\frac{M_3^2 bc}{M_3^2 f + 1}, \\ J_{21}^{[3]} &= \frac{2lM_3 P_3}{(M_3^2 e + 1)^2}, \\ J_{22}^{[3]} &= \frac{M_3^2 l}{1 + M_3^2 e} - pS_3 - \mu, \\ J_{23}^{[3]} &= -pP_3, \\ J_{31}^{[3]} &= \frac{2mM_3 S_3}{(M_3^2 f + 1)^2}, \\ J_{33}^{[3]} &= \frac{M_3^2 m}{M_3^2 f + 1} - v, \\ J_{34}^{[3]} &= -\beta S_3, \\ J_{44}^{[3]} &= \frac{M_3^2 n}{M_3^2 f + 1} + \beta S_3 - (v + \delta). \end{aligned}$$

Berdasarkan baris ketiga matriks $(J(E_3))$, diperoleh nilai eigen $\frac{M_3^2 n}{M_3^2 f + 1} + \beta S_3 - (v + \delta)$, nilai eigen yang lain diperoleh dari matriks 3×3 berikut

$$J_3^* = \begin{bmatrix} J_{11}^{[3]} & -\frac{M_3^2 a}{M_3^2 e + 1} & -\frac{M_3^2 b}{M_3^2 f + 1} \\ \frac{2lM_3 P_3}{(M_3^2 e + 1)^2} & \frac{M_3^2 l}{1 + M_3^2 e} - pS_3 - \mu & -pP_3 \\ \frac{2mM_3 S_3}{(M_3^2 f + 1)^2} & 0 & \frac{M_3^2 m}{M_3^2 f + 1} - v \end{bmatrix}.$$

Misalkan

$$J_3^* = \begin{bmatrix} m_{11}^{[3]} & m_{12}^{[3]} & m_{13}^{[3]} \\ m_{21}^{[3]} & m_{22}^{[3]} & m_{23}^{[3]} \\ m_{31}^{[3]} & 0 & m_{33}^{[3]} \end{bmatrix},$$

maka polinomial karakteristik J_3^* adalah

$$\lambda^3 + c_1 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_3 = 0, \quad (3)$$

dengan

$$\begin{aligned} c_1 &= -(m_{11}^{[3]} + m_{22}^{[3]} + m_{33}^{[3]}), \\ c_2 &= m_{11}^{[3]} m_{22}^{[3]} + m_{11}^{[3]} m_{33}^{[3]} \\ &\quad + m_{22}^{[3]} m_{33}^{[3]} - m_{12}^{[3]} m_{21}^{[3]} \\ &\quad - m_{13}^{[3]} m_{31}^{[3]}, \\ c_3 &= m_{12}^{[3]} m_{21}^{[3]} m_{33}^{[3]} + m_{13}^{[3]} m_{22}^{[3]} m_{31}^{[3]} \\ &\quad - m_{11}^{[3]} m_{22}^{[3]} m_{33}^{[3]} - m_{12}^{[3]} m_{23}^{[3]} m_{31}^{[3]}. \end{aligned}$$

Jika $m_{11}^{[3]} < 0, m_{22}^{[3]} < 0, m_{33}^{[3]} < 0$, maka

$c_1 > 0, c_2 > 0$.

$c_3 > 0$ jika

$$m_{12}^{[3]} m_{21}^{[3]} m_{33}^{[3]} + m_{13}^{[3]} m_{22}^{[3]} m_{31}^{[3]} - m_{11}^{[3]} m_{22}^{[3]} m_{33}^{[3]} > m_{12}^{[3]} m_{23}^{[3]} m_{31}^{[3]}.$$

Berdasarkan kriteria kestabilan Routh-Hurwitz, Eq.3 memiliki nilai eigen dengan bagian real bernilai negatif jika $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$, dan

$$(R1) \Delta_1 = |c_1| > 0,$$

$$(R2) \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Jadi, $c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0$ dan $c_1 c_2 - c_3 > 0$.

Hasil di atas dinyatakan dalam bentuk teorema berikut

Teorema 3. Titik ekuilibrium E_3 stabil lokal jika

$$(a) \frac{M_3^2 n}{M_3^2 f + 1} + \beta S_3 < v + \delta,$$

$$(b) c_1 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0 \text{ dan } c_1 c_2 - c_3 > 0.$$

4. Kestabilan Lokal $E_4(M_4, P_4, 0, 0)$

Matriks Jacobi E_4 adalah

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} J_{11}^{[4]} & J_{12}^{[4]} & J_{13}^{[4]} & J_{14}^{[4]} \\ J_{21}^{[4]} & J_{22}^{[4]} & J_{23}^{[4]} & 0 \\ 0 & 0 & J_{33}^{[4]} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{44}^{[4]} \end{bmatrix},$$

dengan

$$J_{11}^{[4]} = r \left(1 - \frac{2M_4}{K} \right) - \frac{2aM_4 P_4}{(M_4^2 e + 1)^2},$$

$$J_{12}^{[4]} = -\frac{M_4^2 a}{M_4^2 e + 1},$$

$$J_{13}^{[4]} = -\frac{M_4^2 b}{M_4^2 f + 1},$$

$$J_{14}^{[4]} = -\frac{M_4^2 bc}{M_4^2 f + 1},$$

$$J_{21}^{[4]} = \frac{2lM_4 P_4}{(M_4^2 e + 1)^2},$$

$$J_{22}^{[4]} = \frac{M_4^2 l}{1 + M_4^2 e} - \mu,$$

$$J_{23}^{[4]} = -pP_4,$$

$$J_{33}^{[4]} = \frac{M_4^2 m}{M_4^2 f + 1} - v,$$

$$J_{44}^{[4]} = \frac{M_4^2 n}{M_4^2 f + 1} - (v + \delta).$$

Dua nilai eigen dari matriks $J(E_4)$ adalah

$\frac{M_4^2 m}{M_4^2 f + 1} - v$ dan $\frac{M_4^2 n}{M_4^2 f + 1} - (v + \delta)$, nilai eigen yang lain diperoleh dari matriks 2×2 berikut

$$J_4^* = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2M_4}{K} \right) - \frac{2aM_4 P_4}{(M_4^2 e + 1)^2} & -\frac{M_4^2 a}{M_4^2 e + 1} \\ \frac{2lM_4 P_4}{(M_4^2 e + 1)^2} & \frac{M_4^2 l}{1 + M_4^2 e} - \mu \end{bmatrix}.$$

Maka polinomial karakteristik J_4^* adalah

$$\lambda^2 + d_1 \lambda + d_2 = 0$$

dengan

$$\begin{aligned} d_1 &= -\left(\frac{KM^4 e^2 r - KM^4 e^2 \mu - 2M^5 e^2 r + KM^4 e l - 2KM^2 e \mu}{(M^2 e + 1)^2 K} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2KM^2 e r - 4M^3 e r + KU^2 l - 2KM^2 P a - K\mu + Kr - 2Mr}{(M^2 e + 1)^2 K} \right), \\ d_2 &= -\left(\frac{KM^4 e^2 \mu r - 2M^5 e^2 \mu r - KM^4 e l r + 2M^5 e l r}{(M^2 e + 1)^2 K} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2KM^2 e \mu r - 4M^3 e \mu r - KM^2 l r - 2KM^2 P a \mu + 2KM^2 P a}{(M^2 e + 1)^2 K} \right. \\ &\quad \left. + \frac{K\mu r - 2M\mu r}{(M^2 e + 1)^2 K} \right). \end{aligned}$$

Hasil di atas dinyatakan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 4. Titik ekuilibrium E_4 stabil lokal jika

$$(a) \frac{M_4^2 m}{M_4^2 f + 1} < v,$$

$$(b) \frac{M_4^2 n}{M_4^2 f + 1} < (v + \delta),$$

$$(c) KM^4 e^2 r - KM^4 e^2 \mu - 2M^5 e^2 r + KM^4 e l - 2KM^2 e \mu + 2KM^2 e r - 4M^3 e r + KU^2 l - 2KM^2 P a - K\mu + Kr - 2Mr < 0,$$

$$(d) KM^4 e^2 \mu r - 2M^5 e^2 \mu r - KM^4 e l r + 2M^5 e l r + 2KM^2 e \mu r - 4M^3 e \mu r - KM^2 l r - 2KM^2 P a \mu + 2KM^2 P a + K\mu r - 2M\mu r < 0.$$

5. Kestabilan Lokal $E_5(M_5, P_5, S_5, I_5)$

$$J(E_5) = \begin{bmatrix} J_{11}^{[5]} & J_{12}^{[5]} & J_{13}^{[5]} & J_{14}^{[5]} \\ J_{21}^{[5]} & J_{22}^{[5]} & J_{23}^{[5]} & 0 \\ J_{31}^{[5]} & 0 & J_{33}^{[5]} & J_{34}^{[5]} \\ J_{41}^{[5]} & 0 & J_{43}^{[5]} & J_{44}^{[5]} \end{bmatrix},$$

dengan

$$J_{11}^{[5]} = r \left(1 - \frac{2M_5}{K} \right) - \frac{2\alpha M_5 P_5}{(M_5^2 e + 1)^2} - \frac{2b M_5 S_5}{(M_5^2 f + 1)^2} - \frac{2cb M_5 I_5}{(M_5^2 f + 1)^2},$$

$$J_{12}^{[5]} = -\frac{M_5^2 a}{M_5^2 e + 1},$$

$$J_{13}^{[5]} = -\frac{M_5^2 b}{M_5^2 f + 1},$$

$$J_{14}^{[5]} = -cb \frac{M_5^2}{M_5^2 f + 1},$$

$$J_{21}^{[5]} = \frac{2l M_5 P_5}{(M_5^2 e + 1)^2},$$

$$J_{22}^{[5]} = \frac{M_5^2 l}{M_5^2 e + 1} - p S_5 - \mu,$$

$$J_{23}^{[5]} = -p P_5,$$

$$J_{31}^{[5]} = \frac{2m M_5 S_5}{(M_5^2 f + 1)^2},$$

$$J_{33}^{[5]} = \frac{m M_5^2}{1 + M_5^2 f} - \beta I_5 - v,$$

$$J_{34}^{[5]} = -\beta S_5,$$

$$J_{41}^{[5]} = \frac{2n M_5 I_5}{(M_5^2 f + 1)^2},$$

$$J_{43}^{[5]} = \beta I_5,$$

$$J_{44}^{[5]} = \frac{n M_5^2}{1 + M_5^2 f} + \beta S_5 - v - \delta.$$

Polinomial karakteristik $J(E_5)$ adalah

$$\lambda^4 + e_1 \lambda^3 + e_2 \lambda^2 + e_3 \lambda + e_4 = 0, \quad (4)$$

dengan

$$e_1 = -(J_{11}^{[5]} + J_{22}^{[5]} + J_{33}^{[5]} + J_{44}^{[5]}),$$

$$e_2 = J_{11}^{[5]} J_{22}^{[5]} + J_{11}^{[5]} J_{33}^{[5]} + J_{11}^{[5]} J_{44}^{[5]} + J_{22}^{[5]} J_{33}^{[5]} + J_{22}^{[5]} J_{44}^{[5]} + J_{33}^{[5]} J_{44}^{[5]} - J_{12}^{[5]} J_{21}^{[5]} - J_{13}^{[5]} J_{31}^{[5]} - J_{14}^{[5]} J_{41}^{[5]} - J_{34}^{[5]} J_{43}^{[5]},$$

$$e_3 = J_{11}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{43}^{[5]} + J_{12}^{[5]} J_{21}^{[5]} J_{33}^{[5]} + J_{12}^{[5]} J_{21}^{[5]} J_{44}^{[5]} + J_{13}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{31}^{[5]} + J_{13}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{44}^{[5]} + J_{14}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{41}^{[5]} + J_{14}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{33}^{[5]} - J_{11}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{44}^{[5]} - J_{11}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{44}^{[5]} - J_{12}^{[5]} J_{23}^{[5]} J_{31}^{[5]} - J_{13}^{[5]} J_{23}^{[5]} J_{41}^{[5]} - J_{14}^{[5]} J_{31}^{[5]} J_{43}^{[5]} - J_{22}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{44}^{[5]},$$

$$e_4 = J_{11}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{44}^{[5]} + J_{12}^{[5]} J_{21}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{43}^{[5]} + J_{12}^{[5]} J_{23}^{[5]} J_{31}^{[5]} J_{44}^{[5]} + J_{13}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{41}^{[5]} + J_{14}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{31}^{[5]} J_{43}^{[5]} - J_{11}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{43}^{[5]} - J_{12}^{[5]} J_{21}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{44}^{[5]} - J_{12}^{[5]} J_{23}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{41}^{[5]} - J_{13}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{31}^{[5]} J_{44}^{[5]}$$

$$-J_{14}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{41}^{[5]}.$$

Jika $J_{11}^{[5]} < 0, J_{22}^{[5]} < 0, J_{33}^{[5]} < 0, J_{44}^{[5]} < 0$, maka $e_1 > 0, e_2 > 0$.

$e_3 > 0$ jika

$$J_{11}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{43}^{[5]} + J_{12}^{[5]} J_{21}^{[5]} J_{33}^{[5]} + J_{12}^{[5]} J_{21}^{[5]} J_{44}^{[5]} + J_{13}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{31}^{[5]} + J_{13}^{[5]} J_{31}^{[5]} J_{44}^{[5]} + J_{14}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{41}^{[5]} + J_{14}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{41}^{[5]} - J_{11}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{33}^{[5]} - J_{11}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{44}^{[5]} - J_{11}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{44}^{[5]} - J_{14}^{[5]} J_{31}^{[5]} J_{43}^{[5]} - J_{22}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{44}^{[5]} > J_{12}^{[5]} J_{23}^{[5]} J_{31}^{[5]} + J_{13}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{41}^{[5]},$$

demikian juga $e_4 > 0$ jika

$$J_{11}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{44}^{[5]} + J_{12}^{[5]} J_{21}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{43}^{[5]} + J_{14}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{31}^{[5]} J_{43}^{[5]} - J_{11}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{43}^{[5]} - J_{12}^{[5]} J_{21}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{44}^{[5]} - J_{12}^{[5]} J_{23}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{41}^{[5]} - J_{13}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{31}^{[5]} J_{44}^{[5]} - J_{14}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{33}^{[5]} J_{41}^{[5]} > -J_{12}^{[5]} J_{23}^{[5]} J_{31}^{[5]} J_{44}^{[5]} - J_{13}^{[5]} J_{22}^{[5]} J_{34}^{[5]} J_{41}^{[5]}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz, Eq.4 memiliki nilai eigen yang bagian realnya negatif jika $e_1 > 0, e_2 > 0, e_3 > 0, e_4 > 0$, dan

$$(R1) \Delta_1 = |e_1| > 0,$$

$$(R2) \Delta_2 = \begin{vmatrix} e_1 & 1 \\ d_3 & d_2 \end{vmatrix} > 0,$$

$$(R3) \Delta_3 = \begin{vmatrix} e_1 & 1 & 0 \\ e_3 & e_2 & e_1 \\ 0 & e_4 & e \end{vmatrix} > 0,$$

sehingga, $e_1 > 0, e_2 > 0, e_3 > 0, e_4 > 0$, $e_1 e_2 - d_3 > 0$ dan $e_1 e_2 e_3 - e_3^2 - e_1^2 e_4 > 0$.

Hasil di atas dinyatakan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 5. Titik ekuilibrium E_5 stabil lokal jika $e_1 > 0, e_2 > 0, e_3 > 0, e_4 > 0$, $e_1 e_2 - e_3 > 0$ dan $e_1 e_2 e_3 - e_3^2 - e_1^2 e_4 > 0$.

Terlihat bahwa kelima titik ekuilibrium dapat stabil jika memenuhi batas-batasnya. Dalam model ini yang diinginkan adalah mempertahankan populasi pemangsa super terinfeksi penyakit dengan asumsi keberadaannya dapat mencegah populasi pemangsa dari kepunahan.

D. Analisis Kestabilan dengan Pengaruh Penyakit

Contoh mangsa adalah impala, pemangsa adalah citah dan pemangsa super adalah singa. Pengambilan contoh ini, karena diasumsikan karakteristik masing-masing hewan memenuhi kriteria kasus ini. Adapun parameter beserta nilainya disajikan dalam Tabel 2

TABEL 2. NILAI PARAMETER MODEL MANGSA PEMANGSA

Parameter	Nilai	Referensi
r	0.01342	N. Fairhall, 1983
K	200000	Asumsi
a	0.0001787	Mills dkk, 2004
b	0.00009525	Funston dkk, 2005
c	0.5	Asumsi
e	0.0003	Mills dkk, 2004
f	0.0004	Mbava dkk, 2017
l	0.0001705	Asumsi

LANJUTAN TABEL 2

Parameter	Nilai	Referensi
m	0.00027	Asumsi
n	0.00000135	Asumsi
p	0.0004	Asumsi
β	0.16	Keet dkk, 2000
v	0.0667	Workshop report, 2009
δ	0.0767	Workshop report, 2009
μ	0.0556	Kelly dkk, 2000

Untuk melihat pengaruh dari penyebaran penyakit dengan menggunakan nilai Tabel 2, simulasi penyebaran penyakit dibagi menjadi 5 kasus

TABEL 3. PEMBAGIAN KASUS BERDASARKAN NILAI PENYEBARAN PENYAKIT

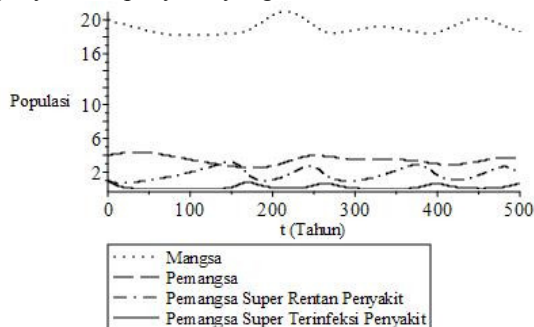
Kasus	β	Kestabilan
1	0	E_2 stabil, E_4 tidak stabil
2	0,08	E_1 tidak stabil, E_2 tidak stabil, E_4 tidak stabil, E_5 stabil
3	0,16	E_1 tidak stabil, E_2 tidak stabil, E_4 tidak stabil, E_5 stabil
4	0,5	E_1 tidak stabil, E_2 tidak stabil, E_4 tidak stabil, E_5 stabil
5	1	E_4 tidak stabil, E_5 stabil

Berdasarkan Tabel 3, untuk berbagai nilai β selama nilai $\beta \neq 0$ hanya E_5 yang dapat stabil, sedangkan pada saat $\beta = 0$, hanya E_2 yang dapat stabil. Dengan kata lain ketika penyakit masih berada pada sistem maka semua populasi akan tetap eksis namun ketika penyakit dihilangkan dari sistem, maka pemangsa akan punah akibat kompetisinya dengan pemangsa super.

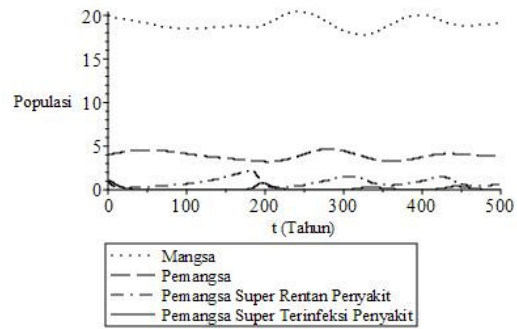
E. Simulasi Numerik

Simulasi numerik diharapkan mampu memberikan gambaran pengaruh dari parameter penyebaran penyakit. Kurva solusi pada sistem ketika parameter penyebaran penyakit yang standar yaitu $\beta = 0.16$ dibandingkan dengan kurva solusi pada saat parameter penyebaran penyakit diubah tanpa merubah nilai parameter yang lain.

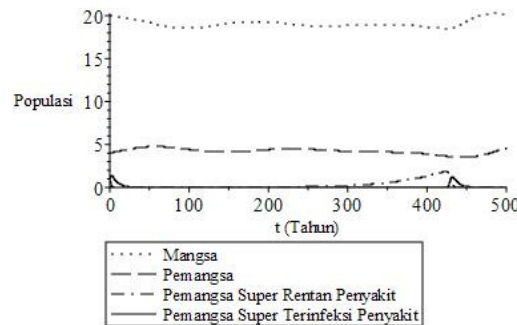
Dengan menggunakan nilai awal $M(0) = 20$; $P(0) = 4$; $S(0) = 1$; $I(0) = 1$, diperoleh dinamika populasi untuk beberapa tingkat penyebaran penyakit yang berbeda.



Gambar 1. Simulasi model dengan $\beta = 0.08$.



Gambar 2. Simulasi model dengan $\beta = 0.16$.



Gambar 3. Simulasi model dengan $\beta = 0.5$.

Berdasarkan Gambar 1, Gambar 2 dan Gambar 3 terlihat bahwa dalam jangka waktu 500 tahun hanya pada Gambar 1, kurva populasi pemangsa dan pemangsa super rentan penyakit dapat berpotongan. Hal ini terjadi dua kali yaitu pada saat di sekitar $t = 130$ dan $t = 160$ sehingga populasi pemangsa super pernah sama banyaknya dengan populasi pemangsa. Dan juga terlihat bahwa populasi pemangsa super yang terinfeksi tidak pernah melebihi pemangsa super yang rentan penyakit. Berbeda halnya dengan Gambar 2 dan Gambar 3 di mana populasi pemangsa dan pemangsa super tidak pernah sama, tetapi populasi pemangsa super rentan penyakit dan terinfeksi penyakit dapat berpotongan. Hal ini menunjukkan bahwa dalam jangka waktu 500 tahun, ketika nilai β dinaikkan ada suatu waktu populasi pemangsa super berpenyakit lebih banyak dibandingkan dengan populasi yang rentan penyakit, namun ketika diturunkan ke nilai $\beta = 0.08$ kepadatan populasi pemangsa super rentan penyakit tidak pernah kurang dari pemangsa super terinfeksi penyakit.

Dapat dilihat juga bahwa dengan meningkatnya tingkat penyebaran penyakit maka osilasi dari kurva solusi juga semakin berkurang. Hal ini menunjukkan bahwa jika tingkat penyebaran penyakit diperbesar maka waktu yang dibutuhkan masing-masing spesies untuk menaikkan populasinya akan lebih lama.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan beberapa kesimpulan dapat diambil:

1. Pada analisis kestabilan model mangsa pemangsa dengan penyakit pada pemangsa super terdapat lima titik ekuilibrium yang mungkin wujud dan stabil.
2. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa dengan perubahan parameter penyebaran penyakit selama nilai penyebaran penyakit tidak nol, semua populasi akan tetap wujud dan stabil meskipun pada saat nilai parameter penyebaran penyakit dinaikkan maka osilasi dai kurva solusi juga semakin berkurang, atau dengan kata lain semua spesies pada sistem membutuhkan waktu yang lebih lama untuk menaikkan populasinya.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis menyampaikan terima kasih kepada Kementerian Riset dan Pengabdian Masyarakat, Direktorat Jenderal Penguat Riset dan Pengembangan, Kemenristekdikti atas bantuan hibah Kompetisi Penelitian Tim Pascasarjana melalui LP2M Unhas dengan nomor kontrak: 2569/UN4.21/LK.23/2017.

DAFTAR PUSTAKA

- Fairhall, N., 1983, "Production Parameters of the Impala, *Aepyceros melampus*", S. Afr. J. Anim. Sci. Vol. 13, No. 3, p.176–179.
- Funston, P.J., dan Mills M.G.L., 2005., "The Influence of Lion Predation on the Population Dynamics of Common Large Ungulates in the Kruger National Park", J. Wildl. Res., Vol. 36, No.1, p.9–22 .
- Haque, M., 2010, "A Predator-prey Model with Disease in the Predator Species only", J. Nonlinear Anal. Real World Appl., Vol. 11, p.2224–2236.
- Huang, Y., Chen, F. dan Zhong, Li. 2006. "Stability Analysis of A Prey-predator Model with Holling Type III Response Function Incorporating a Prey Refuge", Applied Mathematics and Computation, Vol. 182, p.672–683.
- Keet, D.F., Michael A., dan Meltzer D.G.A., 2000, "Tuberculosis in Free-ranging Lions (*Panthera Leo*) in the Kruger National Park", Proceedings of the South African Veterinary Association Biennial Congress, p.232–241.
- Kelly, M.J. dan Durant S.M., 2000, "Viability of the Serengeti Cheetah Population", J. Conserv. Biol., Vol. 14, No. 3, p.786–797.
- Kooi, B.W., VanVoorn, G.A.K. dan Das, K.P., 2011, "Stabilization and Complex Dynamics in Predator-Prey Model with Predator Suffering from an Infectious Disease", Ecological Complexity, Vol. 8, p.113–122.
- Maas, M., Keet, D.F., Rutten, V.P.M., Heesterbeek, J.A.P. dan Nielen M., 2012, "Assessing the Impact of Feline Immunodeficiency Virus and Bovine Tuberculosis Co-Infection in African Lions", Proc. R. Soc. B., Vol. 279, p.4206–4214.
- Mbava, W., Mugisha, J.Y.T., dan Gonsales, J.W., 2017, "Prey, Predator and Super-Predator Model with Disease in the Super-Predator", Applied Mathematics and Computation. Vol. 297, p.92–114.
- Mills, M.G.L., Broomhall, L.S. dan Toit, J.T.du., 2004, "Cheetah *Acinonyx Jubatus* Feeding Ecology in the Kruger National Park and a Comparison Across African Savanna Habitats: Is the Cheetah only a Successful Hunter on Open Grassland Plains?", J. Wildl. Biol., Vol. 10, p.177–186.
- Saenz, R.A. dan Hethcote, H.W., 2006, "Competing Species Models with an Infectious Disease", J. Math. Biosci. Eng. Vol. 3, No. p.1219–235.
- Workshop Report, 2009, Lion (*Panthera leo*) Bovine Tuberculosis Disease Risk Assessment, South African National Parks, Endangered Wildlife Trust and Conservation Breeding Specialist Group.